CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMAP-P0-100 (wersje arkusza: A i B), MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-600, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00, MMAP-P0-Z00, MMAU-P0-100
Termin egzaminu:	8 maja 2023 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2023 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: […] $\lvert x+3\rvert \geq 4$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
B

Wersja B
D

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. 2022, poz.1246).

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	B

Zadanie 3. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $(2n+1)^2-1$ do postaci iloczynu $4n(n+1)$ **oraz** stwierdzenie, że iloczyn $n(n+1)$ jest liczbą parzystą
lub przekształcenie wyrażenia $(2n+1)^2-1$ do postaci $4(n^2+n)$ i uzasadnienie, że suma n^2+n jest liczbą parzystą
ALBO
– przekształcenie wyrażenia $(2n+1)^2-1$ do postaci $2n(2n+2)$ **oraz** stwierdzenie, że wśród dwóch kolejnych liczb parzystych jedna z nich jest liczbą podzielną przez 4,
ALBO

– rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 2l$ (gdzie $l \in \mathbb{N}$), tj. przekształcenie wyrażenia $(2n+1)^2 - 1$ do postaci $8l(2l+1)$ i zapisanie, że iloczyn $l(2l+1)$ jest liczbą naturalną/całkowitą **oraz** rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 2l+1$ (gdzie $l \in \mathbb{N}$), tj. przekształcenie wyrażenia $(2n+1)^2 - 1$ do postaci $8(2l^2+3l+1)$ i zapisanie, że suma $2l^2+3l+1$ jest liczbą naturalną/całkowitą.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $(2n+1)^2 - 1$ do postaci $4n(n+1)$ lub $4(n^2+n)$, lub $2n(2n+2)$

ALBO

– przekształcenie wyrażenia $(2n+1)^2 - 1$ do postaci $4n^2+4n$ i stwierdzenie, że ta suma jest liczbą podzielną przez 4,

ALBO

– rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 2l$ (gdzie $l \in \mathbb{N}$), tj. przekształcenie wyrażenia $(2n+1)^2 - 1$ do postaci $8l(2l+1)$ i zapisanie, że iloczyn $l(2l+1)$ jest liczbą naturalną/całkowitą,

ALBO

– rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 2l+1$ (gdzie $l \in \mathbb{N}$), tj. przekształcenie wyrażenia $(2n+1)^2 - 1$ do postaci $8(2l^2+3l+1)$ i zapisanie, że suma $2l^2+3l+1$ jest liczbą naturalną/całkowitą.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przyjmuje np. $n = 8k + r$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ i r jest resztą z dzielenia liczby n przez 8, i przeprowadzi poprawne rozumowanie dla co najmniej połowy przypadków, ale nie przeprowadzi pełnego rozumowania dla wszystkich przypadków, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający rozpatruje przypadki $n = 2l$ oraz $n = 2l+1$ (gdzie $l \in \mathbb{N}$) i przekształca wyrażenie $(2n+1)^2 - 1$ do postaci, odpowiednio, $8l(2l+1)$ oraz $2l^2+3l+1$, ale nie zapisze, że $8l(2l+1)$ oraz $2l^2+3l+1$ są liczbami naturalnymi/całkowitymi, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Korzystając z wzoru skróconego mnożenia, zapisujemy liczbę $(2n+1)^2 - 1$ w postaci

$$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(n+1)$$

Ponieważ liczby n oraz $n+1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, to jedna z nich jest liczbą parzystą, zatem iloczyn $n(n+1)$ jest liczbą parzystą, więc iloczyn $4n(n+1)$ jest podzielny przez 8. To należało wykazać.

Sposób II

Korzystając z wzoru skróconego mnożenia, zapisujemy liczbę $(2n+1)^2 - 1$ w postaci

$$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4(n^2 + n)$$

Gdy n jest liczbą nieparzystą, to liczba n^2 jest liczbą nieparzystą. Zatem $n^2 + n$ jest liczbą parzystą jako suma dwóch liczb nieparzystych.
Gdy n jest liczbą parzystą, to liczba n^2 jest liczbą parzystą. Zatem $n^2 + n$ jest liczbą parzystą jako suma dwóch liczb parzystych.
Stąd $4(n^2 + n)$ jest liczbą podzielną przez 8. To należało wykazać.

Sposób III
Korzystając z wzoru skróconego mnożenia, zapisujemy liczbę $(2n+1)^2 - 1$ w postaci

$$(2n+1)^2 - 1 = [(2n+1) - 1] \cdot [(2n+1) + 1] = 2n \cdot (2n+2)$$

Ponieważ liczby $2n$ oraz $2n+2$ są kolejnymi liczbami parzystymi, to jedna z nich jest liczbą podzielną przez 4. Zatem iloczyn $2n(2n+2)$ jest liczbą podzielną przez $2 \cdot 4$, czyli przez 8. To należało wykazać.

Sposób IV
Rozważmy dwa przypadki: gdy n jest liczbą parzystą oraz gdy n jest liczbą nieparzystą.

Jeśli n jest liczbą parzystą, możemy ją zapisać w postaci $n = 2l$, gdzie $l \in \mathbb{N}$. Wówczas badana liczba ma postać

$$(2n+1)^2 - 1 = (2 \cdot 2l + 1)^2 - 1 = 16l^2 + 8l + 1 - 1 = 8l(2l+1)$$

Ponieważ $l \in \mathbb{N}$, to również iloczyn $l(2l+1)$ jest liczbą naturalną. Zatem iloczyn $8l(2l+1)$ jest podzielny przez 8.

Jeśli liczba n jest nieparzysta, zapisujemy ją w postaci $n = 2l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{N}$. Wówczas badana liczba ma postać

$$(2n+1)^2 - 1 = [2(2l+1) + 1]^2 - 1 = [4l+3]^2 - 1 =$$
$$= 16l^2 + 24l + 9 - 1 = 8(2l^2 + 3l + 1)$$

Ponieważ $l \in \mathbb{N}$, to również $2l^2 + 3l + 1$ jest liczbą naturalną. Zatem iloczyn $8(2l^2 + 3l + 1)$ jest podzielny przez 8. To należało wykazać.

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	C

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	B

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
C

Wersja B
A

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
D

Wersja B
D

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.6) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
A

Wersja B
A

Zadanie 9. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów […] takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej […] metodą grupowania.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i obliczenie wszystkich rozwiązań równania:

$(-2), \frac{2}{3}, 2$

ALBO

– wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania: $(-2), \frac{2}{3}, 2,$ **oraz** stwierdzenie, że są to jedyne rozwiązania równania.

2 pkt – przekształcenie lewej strony równania do postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego **oraz** rozwiązanie jednego z równań wynikającego z tego rozkładu, np. $(3x-2)(x^2-4) = 0$ i $x = \frac{2}{3}$,

$(3x-2)(x^2-4) = 0$ i $x = -2$ oraz $x = 2$

ALBO

– obliczenie jednego z pierwiastków wielomianu W **oraz** poprawne podzielenie wielomianu W przez odpowiedni dwumian, np.

$x = 2$ i $(3x^3 - 2x^2 - 12x + 8) : (x-2) = 3x^2 + 4x - 4$, *ALBO*

– rozłożenie wielomianu $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + 8$ na czynniki liniowe, np. $W(x) = (3x-2)(x-2)(x+2)$,

ALBO

– przekształcenie równania $3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$ do postaci alternatywy równań i rozwiązanie jednego z nich, np. $(3x - 2 = 0$ lub $x^2 - 4 = 0)$ i $x = 2$ oraz $x = -2$.

1 pkt – przekształcenie lewej strony równania do postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego, np. $(3x-2)(x^2-4) = 0$

ALBO

– zapisanie jednego z rozwiązań równania $3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$ (jeśli to rozwiązanie nie zostało otrzymane w wyniku zastosowania błędnej metody),

ALBO

– przekształcenie równania $3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$ do postaci alternatywy równań, np. $3x - 2 = 0$ lub $x^2 - 4 = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający uzyska trzy poprawne pierwiastki wielomianu, lecz traktuje równanie jako nierówność (podaje zbiór rozwiązań w postaci przedziału/ sumy przedziałów), to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający przy przekształcaniu lewej strony równania do postaci iloczynu zapisuje czynnik $(3x-2)$ z wykładnikiem 2, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie równoważnie i stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

$$x^2(3x-2) - 4(3x-2) = 0$$

$$(3x-2)(x^2-4) = 0$$

$$(3x-2)(x-2)(x+2) = 0$$

$$3x - 2 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 2 = 0 \quad \text{lub} \quad x + 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 2 \quad \text{lub} \quad x = -2$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-2), \frac{2}{3}, 2$.

Sposób II

Przekształcamy równanie równoważnie i stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

$$3x(x^2-4)-2(x^2-4)=0$$

$$(3x-2)(x^2-4)=0$$

$$(3x-2)(x-2)(x+2)=0$$

$$3x-2=0 \quad \text{lub} \quad x-2=0 \quad \text{lub} \quad x+2=0$$

$$x=\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x=2 \quad \text{lub} \quad x=-2$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-2), \frac{2}{3}, 2$.

Sposób III

Obliczamy $W(2)=0$ i stwierdzamy, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=3x^3-2x^2-12x+8$.

Zatem wielomian W jest podzielny przez dwumian $x-2$. Dzielimy wielomian W przez dwumian $x-2$ i otrzymujemy

$$(3x^3-2x^2-12x+8):(x-2)=3x^2+4x-4$$

Zatem $W(x)=(x-2)(3x^2+4x-4)$.

Obliczamy pierwiastki trójmianu $3x^2+4x-4$:

$$\Delta=4^2-4\cdot3\cdot(-4)=64$$

$$x=\frac{-4-8}{2\cdot3}=-2 \quad \text{oraz} \quad x=\frac{-4+8}{2\cdot3}=\frac{2}{3}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-2), \frac{2}{3}, 2$.

Sposób IV

Obliczamy $W(2)=0$ i stwierdzamy, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=3x^3-2x^2-12x+8$.

Obliczamy $W(-2)=0$ i stwierdzamy, że liczba (-2) jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=3x^3-2x^2-12x+8$.

Obliczamy $W\left(\frac{2}{3}\right)=0$ i stwierdzamy, że liczba $\frac{2}{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=3x^3-2x^2-12x+8$.

Ponieważ W jest wielomianem stopnia trzeciego, więc ma co najwyżej trzy pierwiastki rzeczywiste. Oznacza to, że jedynymi rozwiązaniami równania $3x^3-2x^2-12x+8=0$ są liczby: $(-2), \frac{2}{3}, 2$.

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	C

Zadanie 11. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch odpowiedzi, z których obie są poprawne.

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
CE	AD

Zadanie 12.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	C

Zadanie 12.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] największe […] wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
C	B

Zadanie 12.3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] przedziały monotoniczności […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
D

Wersja B
B

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
C

Wersja B
D

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	C

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	C

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów, w tym […] geometrycznych, do rozwiązywania zadań […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
C

Wersja B
B

Zadanie 17. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i obliczenie pierwszej raty: 750 zł.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisanie równania z niewiadomą a_1 (pierwszą ratą):

$$\frac{2a_1 + 17 \cdot (-30)}{2} \cdot 18 = 8910$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego oraz zapisanie równania z niewiadomą a_1:

$\frac{2a_1+17 \cdot 30}{2} \cdot 18 = 8910$ i zapisanie, że a_1 jest ostatnią ratą,

ALBO

– zapisanie równania

$$a_1 + (a_1 - 30) + (a_1 - 2 \cdot 30) + (a_1 - 3 \cdot 30) + \cdots + (a_1 - 17 \cdot 30) = 8910,$$

gdzie a_1 jest pierwszą ratą, lub równania

$a_1 + (a_1 + 30) + (a_1 + 2 \cdot 30) + (a_1 + 3 \cdot 30) + \dots + (a_1 + 17 \cdot 30) = 8910$
(łącznie z zapisem, że a_1 jest ostatnią ratą),
ALBO
– zapisanie zależności między pierwszą (a_1) i ostatnią ratą (a_{18}), np.
$a_1 + a_{18} = 8910 : 9$ albo $a_{18} = a_1 - 17 \cdot 30$ itp.,
ALBO
– rozpatrzenie osiemnastowyrazowego ciągu arytmetycznego o różnicy (-30) lub 30 i zapisanie co najmniej pierwszego oraz ostatniego wyrazu tego ciągu, np.
$(x, x - 30, x - 60, \dots, x - 510)$ dla dowolnego x (np. jak w sposobie V),
ALBO
– zapisanie układu równań, z którego można obliczyć jedną z rat, np.
$\frac{a_9+a_{10}}{2} = 495$ i $a_{10} = a_9 - 30$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
2. Jeżeli zdający zapisze tylko 750 zł, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający rozważa ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 30$, obliczy $a_1 = 240$ i nie interpretuje a_1 jako ostatniej raty, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający błędnie interpretuje liczbę 8910 jako wyraz ciągu rat, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Kolejne raty tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $S_{18} = 8910$ i $r = -30$. Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i otrzymujemy równanie

$$\frac{2a_1 + 17 \cdot (-30)}{2} \cdot 18 = 8910$$

Przekształcając to równanie równoważnie, otrzymujemy

$$9(2a_1 - 510) = 8910$$

$$2a_1 - 510 = 990$$

$$a_1 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

Sposób II

Przyjmujemy, że kolejne (licząc od końca) raty tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $S_{18} = 8910$ i $r = 30$. Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i otrzymujemy równanie

$$\frac{2a_1 + 17 \cdot 30}{2} \cdot 18 = 8910$$

Przekształcając to równanie równoważnie, otrzymujemy

$$9(2a_1 + 510) = 8910$$

$$2a_1 + 510 = 990$$

$$a_1 = 240$$

Ostatnia rata była równa 240 zł.

Obliczamy wysokość pierwszej raty

$$a_{18} = 240 + 17 \cdot 30 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

Sposób III

Kolejne kwoty, o które pomniejszana jest pierwsza rata, tworzą ciąg arytmetyczny, w którym różnica jest równa 30. Wtedy osiemnasta rata jest mniejsza od pierwszej raty o kwotę $(18-1) \cdot 30 = 510$ zł.

Stąd

$$a_1 + (a_1 - 30) + (a_1 - 60) + (a_1 - 90) + \ldots + (a_1 - 510) = 8910$$

$$18a_1 - (30 + 60 + 90 + \ldots + 510) = 8910$$

gdzie suma siedemnastu liczb $30 + 60 + 90 + \ldots + 510$ jest równa

$$\frac{30 + 510}{2} \cdot 17 = 4590$$

Zatem

$$18a_1 - 4590 = 8910$$

$$18a_1 = 13500$$

$$a_1 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

Sposób IV

Kolejne raty tworzą ciąg arytmetyczny, zatem

$$a_1 + a_{18} = a_2 + a_{17} = a_3 + a_{16} = \ldots = a_9 + a_{10}$$

Obliczamy wartość pojedynczej sumy

$$a_1 + a_{18} = 8910 : 9 = 990$$

Korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego, mamy

$$a_1 + a_1 - 17 \cdot 30 = 990$$

$$2a_1 = 990 + 510$$

$$a_1 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

Sposób V

Przyjmujemy, że pierwsza rata była równa 1000 zł. Wtedy kolejne raty są równe:

970 zł, 940 zł, ... , 490 zł.

Suma wszystkich rat jest równa $13\,410$ zł i przewyższa kwotę z warunków zadania o 4500 zł.

Obliczamy, o ile należy zmniejszyć każdą ratę:

$$4500 : 18 = 250$$

$$1000 - 250 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

Sposób VI

Kolejne raty są wyrazami osiemnastowyrazowego ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy $r = -30$. Obliczymy dowolną ratę (np. dziewiątą), korzystając z własności tego ciągu:

$$\begin{cases} (a_9 + a_{10}) \cdot 9 = 8910 \\ a_{10} = a_9 - 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_9 + a_{10} = 990 \\ a_9 - a_{10} = 30 \end{cases}$$

$$2a_9 = 1020 \qquad a_9 = 510$$

Zatem

$$a_1 = a_9 - 8 \cdot (-30) = 510 + 240 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji […] tangens dla kątów od 0° do 180° […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	C

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	B

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w […] rombach […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
B	D

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
B	C

Zadanie 22. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda i obliczenie pola trójkąta T_2: $P_2 = 120$.

1 pkt – wykorzystanie podobieństwa trójkątów i zapisanie układu równań/równania pozwalającego obliczyć długości przyprostokątnych trójkąta T_2 , np.

$\frac{a_2}{b_2} = \frac{12}{5}$ i $a_2^2 + b_2^2 = 26^2$, $(12x)^2 + (5x)^2 = 26^2$

ALBO

– zapisanie stosunku pól trójkątów T_1 i T_2: $\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{|BC|}{26}\right)^2$ (lub $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{26}{|BC|}\right)^2$) **oraz** obliczenie długości odcinka BC: $|BC| = 13$,

ALBO

– obliczenie/zapisanie skali podobieństwa trójkątów, np. $k = \frac{|EF|}{|BC|} = 2$ (lub $k = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{1}{2}$),

ALBO

– obliczenie/zapisanie długości przyprostokątnych trójkąta T_2 : $10, 24$,

ALBO

– obliczenie długości c_1 przeciwprostokątnej trójkąta T_1 **oraz** zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć długości a_2, b_2 przyprostokątnych trójkąta T_2, np.

$c_1 = 13$ i $\frac{13}{12} = \frac{26}{a_2}$ i $\frac{13}{5} = \frac{26}{b_2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Długości przyprostokątnych trójkątów T_1 i T_2 oznaczymy odpowiednio jako: a_1, b_1 oraz a_2, b_2 . Z podobieństwa trójkątów T_1 i T_2 wynika, że stosunki odpowiednich boków są równe:

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \quad \text{gdzie} \quad a_1 = 12, \quad b_1 = 5$$

Zatem

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{12}{5} \quad \text{więc} \quad b_2 = \frac{5}{12} a_2$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta T_2 mamy:

$$a_2^2 + b_2^2 = 26^2$$

$$a_2^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 a_2^2 = 26^2$$

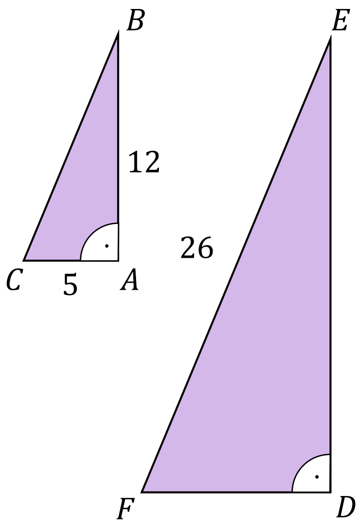
$$\frac{169}{144} a_2^2 = 26^2$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{144}{169}} \cdot 26 = 24$$

Zatem $b_2 = \frac{5}{12} \cdot 24 = 10$.
Obliczamy pole trójkąta T_2:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot b_2 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120$$

Sposób II
Oznaczamy wierzchołki trójkąta T_1 przez A, B, C, gdzie BC jest przeciwprostokątną tego trójkąta, $|AB| = 12$ i $|AC| = 5$. Oznaczamy wierzchołki trójkąta T_2 przez D, E, F, gdzie EF jest przeciwprostokątną tego trójkąta.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta T_1 mamy

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

$$12^2 + 5^2 = |BC|^2$$

$$|BC|^2 = 169$$

$$|BC| = 13$$

Obliczamy skalę podobieństwa trójkąta T_2 do trójkąta T_1:

$$k = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{26}{13} = 2$$

Obliczamy długości przyprostokątnych trójkąta T_2:

$$|DE| = 2 \cdot |AB| = 2 \cdot 12 = 24$$

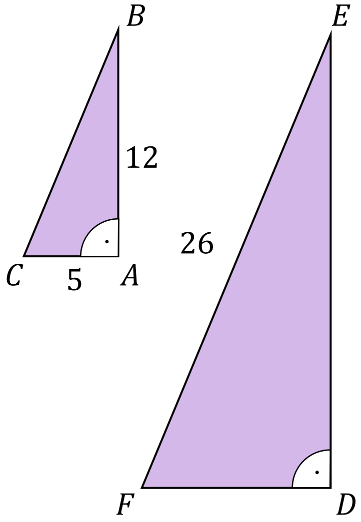
$$|DF| = 2 \cdot |AC| = 2 \cdot 5 = 10$$

Obliczamy pole trójkąta T_2:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120$$

Sposób III

Oznaczamy wierzchołki trójkąta T_1 przez A, B, C, gdzie BC jest przeciwprostokątną tego trójkąta, $|AB| = 12$ i $|AC| = 5$. Oznaczamy wierzchołki trójkąta T_2 przez D, E, F, gdzie EF jest przeciwprostokątną tego trójkąta.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta T_1 mamy

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

$$12^2 + 5^2 = |BC|^2$$

$$|BC|^2 = 169$$

$$|BC| = 13$$

Obliczamy skalę podobieństwa trójkąta T_2 do trójkąta T_1:

$$k = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{26}{13} = 2$$

Obliczamy pole P_1 trójkąta T_1:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$$

Korzystając z tego, że stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, obliczamy pole P_2 trójkąta T_2:

$$\frac{P_2}{P_1} = k^2$$

Zatem

$$P_2 = k^2 \cdot P_1 = 2^2 \cdot 30 = 120$$

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: IX.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A2	A3

Zadanie 24. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład […] równoległość […] do innej prostej […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	B

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną; X.3) rozpoznaje w graniastosłupach […] kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) […]. VII.4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty […]).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
B	D

Zadanie 26. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni […] ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej ostrosłupa **oraz** poprawne wyniki: $V = 108$ i $P_c = 108 + 72\sqrt{3}$.

3 pkt – obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 108$

ALBO

– obliczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa: $P_c = 108 + 72\sqrt{3}$ **oraz** obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 3$.

2 pkt – obliczenie/zapisanie długości krawędzi podstawy: $a = 6\sqrt{3}$ **oraz** obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 3$

ALBO

– obliczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa: $P_c = 108 + 72\sqrt{3}$.

1 pkt – obliczenie/zapisanie długości krawędzi podstawy: $a = 6\sqrt{3}$

ALBO

– obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przyjmuje w rozwiązaniu, że trójkąt ESO lub BSD, lub jedna ze ścian bocznych ostrosłupa jest trójkątem równobocznym i wykorzystuje to do obliczenia długości krawędzi podstawy, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie (o ile nie nabył prawa do uzyskania 1 punktu za obliczenie wysokości ostrosłupa).

2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej

b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa

c) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

d) przyjęcie, że wysokość ostrosłupa jest równa $3\sqrt{3}$ i $|OE| = 3$,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.

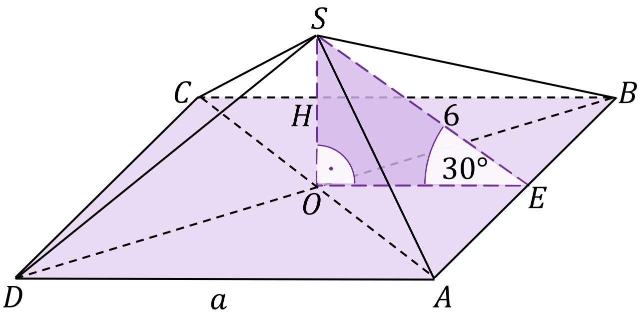
Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–d), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

a – długość krawędzi podstawy,

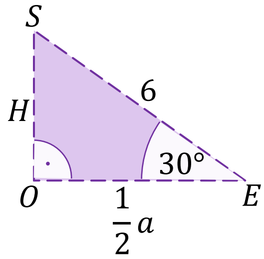
H – wysokość ostrosłupa.



Zauważamy, że $a > 0$ i $H > 0$.

Ponieważ O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, to $|OE| = \frac{1}{2}a$.

W trójkącie prostokątnym SOE mamy



$$\sin 30° = \frac{|SO|}{|SE|} = \frac{H}{6}$$

Zatem

$$H = 6 \cdot \sin 30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Ponadto

$$\cos 30° = \frac{|OE|}{|SE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{6} = \frac{a}{12}$$

Stąd

$$a = 12 \cdot \cos 30° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(6\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3 = 108$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c ostrosłupa:

$$P_c = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 = 108 + 72\sqrt{3}$$

Zadanie 27. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
B

Wersja B
B

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
C

Wersja B
A

Zadanie 29. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i […] znajduje medianę […].

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi.
1 pkt – wybranie jednej poprawnej odpowiedzi.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
29.1. C
29.2. A

Wersja B
29.1. B
29.2. E

Zadanie 30. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{6}{64}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 8 \cdot 8$ lub sporządzenie tabeli o 64 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, z których co najmniej jedno pole jest wypełnione, lub sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego

ALBO

– wypisanie (zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego:
$(3,5), (5,3), (6,5), (5,6), (5,9), (9,5)$,

ALBO

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 6$, jeśli nie została otrzymana w wyniku zastosowania błędnej metody,

ALBO

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, które zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa $\frac{1}{8}$ na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,

ALBO

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{64}$,

ALBO

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{6}{64}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 6 lub 64 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych obrazuje tabela 8×8, co oznacza, że moc zbioru Ω jest równa 64.

W tabeli zaznaczamy iloczyny podzielne przez 15.

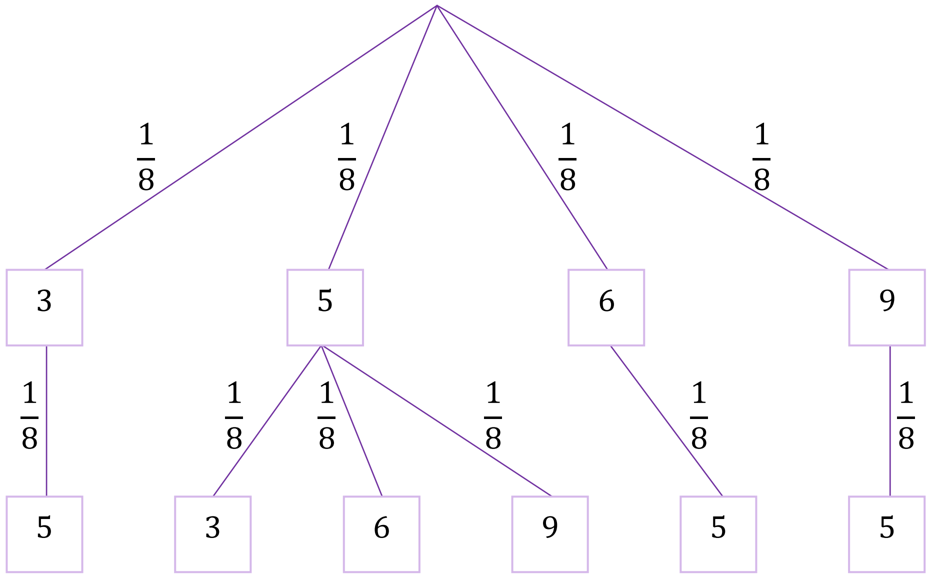
	2	3	4	5	6	7	8	9
2								
3				×				
4								
5		×			×			×
6				×				
7								
8								
9				×				

Zdarzeń sprzyjających wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 15, jest 6. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 15, jest równe $\frac{6}{64}$.

Sposób II (drzewo stochastyczne)

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.

Oznaczamy przez A zdarzenie polegające na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 15.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = \frac{6}{64}$$

Sposób III

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω to zbiór par uporządkowanych elementów ze zbioru 8-elementowego, zatem moc zbioru Ω jest równa $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$.
Oznaczamy przez A zdarzenie polegające na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 15.
Wielokrotności liczby 15, które mogą być iloczynami elementów ze zbioru Ω, to $15, 30, 45$.
Wyznaczamy iloczyny, które spełniają powyższy warunek:

$15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ – dwa iloczyny – dwa zdarzenia elementarne: $(3, 5)$ oraz $(5, 3)$,
$30 = 6 \cdot 5 = 5 \cdot 6$ – dwa iloczyny – dwa zdarzenia elementarne: $(6, 5)$ oraz $(5, 6)$,
$45 = 9 \cdot 5 = 5 \cdot 9$ – dwa iloczyny – dwa zdarzenia elementarne: $(9, 5)$ oraz $(5, 9)$.

Sprzyjających zdarzeń elementarnych jest 6, więc $P(A) = \frac{6}{64}$.

Zadanie 31.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: V.3) […] interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą […] wzorów […]; V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
FP

Wersja B
FP

Zadanie 31.2. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania zadania oraz poprawne wyniki: 11 i 400.

1 pkt – wyznaczenie postaci kanonicznej funkcji L: $L(n) = -(n-11)^2 + 400$

ALBO

– obliczenie, którego dnia analizowanego okresu w aptece obsłużono największą liczbę klientów lub obliczenie największej liczby klientów: 11 lub 400,

ALBO

– obliczenie pierwszej współrzędnej p wierzchołka paraboli z własności $L(k_1) = L(k_2)$, gdzie k_1, k_2 są różnymi liczbami takimi, że $|p - k_1| = |p - k_2|$:

$$p = \frac{k_1 + k_2}{2} = 11$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie oblicza pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza drugą współrzędną, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie (o ile pierwsza współrzędna jest liczbą należącą do dziedziny).
2. Jeżeli zdający nie zapisze, że 11 należy do dziedziny funkcji L, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający oblicza największą wartość funkcji L, korzystając z rachunku różniczkowego, i nie zapisze przedziałów monotoniczności funkcji, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie (gdy wyznaczy pochodną funkcji $L(x)$ określoną dla $x \in [1, 30]$, obliczy miejsce zerowe pochodnej funkcji $L(x)$ i wartość funkcji L w tym punkcie).
4. Jeżeli zdający oblicza $L(11) = 400$ i $L(11-k) = L(11+k)$, gdzie $k \neq 0$, i wskaże wartość największą, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający zapisze tylko $L(11) = 400$, to otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wykresem funkcji $L(n) = -n^2 + 22n + 279$, gdzie n jest liczbą naturalną z przedziału $[1, 30]$, jest zbiór punktów leżących na paraboli o ramionach skierowanych w dół.
Przekształcamy wzór funkcji L do postaci kanonicznej:

$$L(n) = -n^2 + 22n + 279 = -[n^2 - 22n] + 279 = -[(n-11)^2 - 11^2] + 279 =$$
$$= -(n-11)^2 + 121 + 279 = -(n-11)^2 + 400$$

Z postaci kanonicznej odczytujemy współrzędne wierzchołka paraboli: $W = (11, 400)$.

Interpretujemy otrzymane wartości: największą liczbę klientów obsłużono jedenastego dnia badanego okresu i było to 400 osób.

Sposób II

Wykresem funkcji $L(n) = -n^2 + 22n + 279$, gdzie n jest liczbą naturalną z przedziału $[1, 30]$, jest zbiór punktów leżących na paraboli o ramionach skierowanych w dół. Jej największa wartość jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli $W = (p, q)$.
Stąd

$$p = \frac{-22}{2 \cdot (-1)} = 11, \quad 11 \in \{1, 2, \dots, 30\}$$

$$q = L(p) = -11^2 + 22 \cdot 11 + 279 = 400$$

Największą liczbę klientów obsłużono jedenastego dnia badanego okresu i było to 400 osób.

Sposób III

Wykorzystamy następującą własność funkcji kwadratowej $L(x) = -x^2 + 22x + 279$.
Jeśli $L(k_1) = L(k_2)$, to liczba

$$\frac{k_1 + k_2}{2}$$

jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji L. Jeśli ponadto współczynnik przy x^2 jest liczbą ujemną, to liczba

$$L\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)$$

jest największą wartością funkcji L.
Wykonujemy obliczenia – szukamy argumentów, dla których funkcja przyjmuje tę samą wartość:

$$L(9) = 396$$
$$L(10) = 399$$
$$L(11) = 400$$
$$L(12) = 399$$

Zauważamy, że $L(10) = L(12)$. Ponieważ

$$\frac{10 + 12}{2} = 11 \quad \text{oraz} \quad 11 \in \{1, \dots 30\}$$

więc funkcja L przyjmuje wartość największą równą 400 dla argumentu 11. To oznacza, że największą liczbę klientów obsłużono jedenastego dnia badanego okresu i było to 400 osób.

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
II. dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin główny 2023.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.

9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 3.

1 pkt – zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy do wyrażenia $(2n+1)^2$.

Zadanie 9.

2 pkt – zapisanie dwóch pierwiastków wielomianu $3x^3-2x^2-12x+8$ (o ile nie zostały one uzyskane w wyniku błędnej metody).

1 pkt – przekształcenie wielomianu $3x^3-2x^2-12x+8$ do postaci $3(x^2-4)-2(x^2-4)$ lub $x^2(3x-2)-4(3x-2)$.

Zadanie 17.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 22.

1 pkt – obliczenie długości c_1 przeciwprostokątnej trójkąta T_1 **oraz** wykorzystanie podobieństwa trójkątów i zapisanie związku między długościami przyprostokątnych trójkąta T_2 : $c_1=13$ i $\frac{a_2}{b_2}=\frac{12}{5}$

ALBO

– obliczenie długości c_1 przeciwprostokątnej trójkąta T_1 **oraz** zapisanie równania pozwalającego obliczyć długość jednej z przyprostokątnych trójkąta T_2, np.

$c_1=13$ i $\frac{13}{12}=\frac{26}{a_2}$, $c_1=13$ i $\frac{13}{5}=\frac{26}{b_2}$.

Zadanie 26.

1 pkt – zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznej lub związków miarowych w trójkącie o kątach $30°, 60°, 90°$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością ostrosłupa lub połową długości krawędzi podstawy), np. $\frac{|OE|}{6} = \cos 30°$, $\frac{H}{6} = \frac{1}{2}$.

Zadanie 30.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 64 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, lecz popełni błąd w ich zliczeniu ($|A| = 5$) i konsekwentnie zapisze wynik $\frac{5}{64}$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 31.2.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.